第27卷 第4期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 4
2010年08月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Aug. 2010

文章编号:1005-3085(2010)04-0699-05

由自相似集生成强分离图递归集的算法*

邓国泰[1]， 刘春苔[2]

(1- 华中师范大学数学与统计学学院，武汉 430079； 2- 武汉工业学院数理科学系，武汉 430023)

摘 要: 本文讨论了由自相似集生成图递归集的算法。利用辅助函数迭代系，针对压缩率的为整数的倒数和数字集为有理数的自相似集，给出了一个新的算法，使得所生成的图递归集满足强分离条件。

关键词: 迭代函数系；强分离条件；图递归集

分类号: **AMS**(2000) 28A80 **中图分类号**: O174 **文献标识码**: A

1 引言

设 $|q|>1$，$\{f_i(x)=q^{-1}(x+d_i)\}_{i=1}^N$ 为一族压缩函数系 (也称为迭代函数系 (IFS))，则存在唯一的非空紧集 $T=T(q,\mathcal{D})$—称之为 IFS $\{f_i\}_{i=1}^N$ 的吸引子或自相似集—满足 $T=\cup_{i=1}^N f_i(T)$，这里数字集 $\mathcal{D}$ 为 $\{d_1,d_2,\cdots,d_N\}$。称一个 IFS 或自相似集满足开集条件 (OSC) 如果存在一个开集 O 使得对于任意 i 有 $f_i(O)\subset O$，且对于 $i\neq j$ 有 $f_i(O)\cap f_j(O)=\emptyset$。

对于自相似集[1-3]，如果它不满足开集条件，则计算它的分形维数 (Hausdorff 维数) 是很困难的。当它满足开集条件时其维数是 $\ln N/\ln q$，但是如何判断一个 IFS 或自相似集是否满足开集条件又是另一件非常困难的事情，即使一个 IFS 满足 OSC，也很难寻找到 OSC 中的开集。由文献 [4] 的思想，我们针对数字集 $\mathcal{D}$ 为有理数的情形，我们给出了一个新的计算 $T=T(q,\mathcal{D})$ 维数的方法，该算法生成的图递归集满足强分离条件。据我们所知，如果没有有理数的条件，目前还没有一个一般的方法去计算 T 的维数。

定理 1 设 $D\subset\mathbb{Q}$ 且 $\dim T<1$，则存在满足强分离条件的图递归集 $\{T_i\}_{i=1}^n$，使得 $T_1=T(q,D)$。

2 满足强分离条件的图递归集

设

$$\left\{f_i(x)=\frac{1}{q}(x+d_i)\right\}_{i=1}^N$$

是一个以 $T=T(q,\mathcal{D})$ 为吸引子的 IFS，其中 $\mathcal{D}=\{d_1,d_2,\cdots,d_N\}$，并且 $q>1$ 为整数。因为可以进行线性变换，所以可以假定 $0=d_1<d_2<\cdots<d_N=q-1$，则对于任意 i，有 $f_i([0,1])\subset[0,1]:=\Gamma$ 且 $0,1\in T$。

设 $G=(V,E)$ 为一个有向图，这里 $V=\{1,2,\cdots,N\}$ 为顶点集，E 为有向边[5]。一般假定每个顶点至少有一个出边，对任意的 $e\in E$，存在一个压缩率为 $\rho\in(0,1)$ 的相似压缩映射 $f_e:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。符号 G^* 表示标识了相似映射 f_e 的有向图 G，也称其为有向迭代函数

收稿日期: 2008-09-22. **作者简介**: 邓国泰 (1976年1月生)，男，博士，讲师. 研究方向：分形几何与小波分析.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10771082; 10926126).

系(GIFS)，而图G称为G^*的基图。令$E_{ij}=\{e\in E: e$从顶点i到顶点$j\}$为所有从顶点i到顶点j的有向边，则存在唯一的一个非空紧集列$\{T_i\}_{i=1}^N$，使得

$$T_i=\bigcup_{j=1}^N\bigcup_{e\in E_{ij}}f_e(T_j),$$

称这些集合$\{T_i\}$为图递归集，如果这些等式的右边并是不交并，则称该GIFS或者$\{T_i\}$满足强分离条件(SSC)。显然当V仅含有一个顶点时，G^*就退化为普通的IFS。

记$\Omega_N^k=\{1,2,\cdots,N\}^k$, $\Omega_N^*=\cup_{k=0}^{\infty}\Omega_N^k$，约定$\Omega_N^0=\emptyset$。如果$I_1$, $I_2\in\Omega_N^k$，则I_1, I_2定义为词I_1和I_2的连接。如果$I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)\in\Omega_N^k$，则记

$$f_I=f_{i_1}\circ f_{i_2}\circ\cdots\circ f_{i_k},\quad d_I=d_{i_k}+Ad_{i_{k-1}}+\cdots+A^{k-1}d_{i_1},$$

约定$f_\emptyset=\mathrm{Id}$为恒等映射。Ω_q^k, Ω_q^*也类似定义。

令$I\in\Omega_N^k$，记$T_I=f_I(\Gamma)$，同时定义I的邻域为

$$[I]=\Big\{I':\text{存在 }\{I_1=I,I_2,\cdots,I_n=I'\}\subset\Omega_N^k\text{ 使得 }\cup_{i=1}^n T_{I_i}\text{ 连通}\Big\}.$$

下面我们利用归纳法从$[I]$中构造一个子集$U(I)$。首先，令$I_1'=\min\{I': d_{I'}\le d_L, L\in[I]\}$。如果已经挑选了$I_1',I_2',\cdots,I_n'$，则挑选第$n+1$元$I_{n+1}'=\min\{I'\in[I]: d_{I_n'}<d_{I'}\}$。因为$[I]$为有限集，从而上述挑选在有限步完成步骤。最后令$U(I)$为所选元的并集。显然，对于任意的$I$, $I'\in\Omega_N^*$，要么$U(I)=U(I')$，要么$U(I)\cap U(I')=\emptyset$，且都有$U(I)\subset[I]$。

令

$$\Big\{g_i(x)=\frac{1}{q}(x+i-1)\Big\}_{i=1}^q,$$

简单计算表明$\Gamma=T(q,\mathcal{C})=[0,1]\supset T$，这里$\mathcal{C}=\{0,1,\cdots,q-1\}$。注意到$\{\Gamma_J:=g_J(\Gamma): J\in\Omega_q^k\}_{k=0}^{\infty}$形成$\Gamma$一个完全网剖分。令

$$S_k=\Big\{J\in\Omega_q^k: g_J(\Gamma^o)\cap f_I(\Gamma^o)\neq\emptyset,\ I\in\Omega_N^k\Big\},\quad S=\cup_{k=1}^{\infty}S_k.$$

从文献[4]可知

$$T=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{J\in S_k}\Gamma_J.$$

不难验证对于任意$J\in S_k$, $I\in\Omega_N^k$，总有$f_I(\Gamma^o)\cap g_J(\Gamma^o)\neq\emptyset\Leftrightarrow d_I-c_J\in(-1,1)$。符号$\Delta(J)$定义为

$$\Delta(J)=\Big\{d_I-c_J: I\in\Omega_N^k,\ f_I(\Gamma^o)\cap g_J(\Gamma^o)\neq\emptyset\Big\}.$$

因为$\mathcal{D}$仅包含有理数，集族$\{\Delta(J)\neq\emptyset: J\in\Omega_q^*\}$为有限集，简记其为

$$\Big\{\Delta(J_0):=\Delta(\emptyset)=\{0\},\ \Delta(J_1),\ \Delta(J_2),\ \cdots,\ \Delta(J_m)\Big\}.$$

令

$$\alpha(J,k)=\bigcup_{J'\in\Omega_q^k,\ JJ'\in S_{|J|+k}}\Gamma_{JJ'}$$

为Γ_J的k阶子区间。以下命题很容易验证，在此省略其证明。

命题1　对于任意$J\in S$，我们有$\alpha(J;k+1)\subset\alpha(J,k)$且$\cap_{k\geq 1}^{\infty}\alpha(J,k)=T\cap\Gamma_J$。进一步，$T\cap\Gamma_J$的直径为正数。

命题2　对于任意 $J\in S$，若 $\alpha(J,k)$ 不连通，则 $\alpha(J,k+1)$ 不连通。

为了得到定理1的证明，下面先证明几个引理。

引理1[4]　如果 $\Delta(J)=\Delta(J')$，则对于所有 $1\le j\le q$，有 $\Delta(Jj)=\Delta(J'j)$。

引理2　若 $\dim T<1$, $\mathcal{D}\subset\mathbb{Q}$，则存在常数 $N_1>0$，使得任意 $J\in S$ 和 $k>N_1$，有 $\alpha(J,k)$ 不连通。

证明　假设结论错误，由命题2知，存在 J 使得对所有 k, $\alpha(J,k)$ 连通。首先假定 J 取自

$$\left\{J_j:=\min\{J:\Delta(J)=\Delta(L_j)\}\right\}_{j=0}^{m}.$$

这里的序是字典序。令 $a=\min(T\cap\Gamma_J)$, $b=\max(T\cap\Gamma_J)$。由命题1和集 $\alpha(J,k)$ 的连通性，知 $[a,b]\subset T\cap\Gamma_J$，所以 T 的维数不小于1，这与 $\dim T<1$ 矛盾。从而对于每个 $0\le j\le m$，均存在 k_j，使得对于所有 $k>k_j$，集 $\alpha(J_j,k)$ 是不连通的。令 $N_1=\max\{k_j:0\le j\le m\}$，则对所有 $k\ge N_1$，集 $\alpha(J,k)$ 都是不连通的。其次，假定 $J\in S$，此时存在 j 使得 $\Delta(J')=\Delta(J_j)$。由于 $\alpha(J',k)$ 和 $\alpha(J_j,k)$ 是自相似的，知当 $k>N_1$ 时，$\alpha(J',k)$ 不连通。

定义 J 的邻域

$$V(J)=\left\{J':\text{存在 }\{J_1'=J,J_2',\cdots,J_n'=J'\}\subset S_k\text{ 使得 }\cup_{j=1}^{n}\Gamma_{J_j'}\text{ 连通}\right\}.$$

记

$$T_{U(I)}=\bigcup_{I'\in U(I)}T_{I'},\quad \Gamma_{V(I)}=\bigcup_{J'\in V(J)}\Gamma_{J'}.$$

引理3　若 $\dim T<1$, $\mathcal{D}\subset\mathbb{Q}$，则存在常数 N_2，使得集 $V(J)$ 至多含有 N_2 个元素，这里 $J\in S$。

证明　令 $N_2=3q^{N_1}$，其中 N_1 由引理2所给出。假设结论错误，则存在

$$V(J)=\{J_1',J_2',\cdots,J_k'\},$$

使得 $k>N_2$。设 $|J|$ 的长度为 l。注意到对于每个 $k>0$, $\Lambda_k=\{\Gamma_J:J\in S_k\}$ 中的区间内部是没有重叠的。$\Gamma_{V(J)}$ 的长度为 $kq^{-l}>3q^{-l+N_1}$，而对于任意的 $J'\in S_{l-N_1}\Gamma_{J'}$ 的长度为 q^{l-N_1}，从而由抽屉原则可知至少存在一个 $J'\in S_{l-N_1}$，使得 $\Gamma_{J'}\subset\Gamma_{V(J)}$。令 $A=\{L\in V(J):\Gamma_{J'}^{o}\cap\Gamma_L\ne\emptyset\}$，由 $\alpha(J',N_1)$ 的定义知

$$\alpha(J',N_1)\supset\bigcup_{L\in A}\Gamma_L=\Gamma_{J'},$$

但这与 $\alpha(J',N_1)$ 不连通矛盾。

设 $E\subset\Omega_N^k$，定义 $d_E=\{d_I:I\in E\}$，同时定义 $\Lambda([I])$ 为 $\Lambda(E)=\left\{d_J-\min(d_E):J\in E\right\}$，显然 $\Lambda([I])=\Lambda(U(I))$。下面我们证明集 $\{\Lambda(U(I)):I\in\Omega_N^*\}$ 为有限集，这样以其元素为顶点就可以构造一个图递归集来重构自相似集 T，而且该图递归集满足强分离条件。

引理4　假设 $\dim T<1$ 且 $\mathcal{D}\subset\mathbb{Q}$，则集 $\{\Lambda(U(I))\}$ 为有限集。

证明　对于任意 $I\in\Omega_N^*$，记 $k=|I|$，存在 $J\in S_k$，使得

$$\left[\min(T_{U(I)}),\max(T_{(U(I))})\right]=T_{U(I)}\subset\Gamma_{V(J)}=\frac{[c_{\min(V(J))},c_{\max(V(J))}+1]}{q^k},$$

于是由引理3知

$$\Lambda(U(I))\subset[0,c]\subset[0,q^{N_2}],$$

这里$c = c_{\max(V(J))} - c_{\min(V(J))}$。因为$d_i$都是有理数，从而存在整数$p$，使得$pD \subset Z$。因此$p\Lambda(U(I)) \subset [0, pq^{N_2}] \cap Z$，这就得到$\#\{\Lambda(U(I)) : I \in \Omega_N^*\} \le 2^{2pq^{N_2}+1}$。

引理5 设

$$U(I) = \{I_1, I_2, \cdots, I_k\}, \quad (I') = \{I_1', I_2', \cdots, I_k'\} \subset \Omega_N^{k_0},$$

记

$$d_{I_1} = \min(d_{U(I)}), \quad d_{I_1'} = \min(d_{U(I')}).$$

如果$\Lambda(U(I)) = \Lambda(U(I'))$，则对于$1 \le m$，$n \le k$和$1 \le i$，$j \le N$，$T_{I_m i} \cap T_{I_n j} \ne \emptyset$，等价于$T_{I_m' i} \cap T_{I_n' j} \ne \emptyset$。进一步，对于$1 \le m \le k$，均有$d_{I_m i} - d_{I_1 1} = d_{I_m' i} - d_{I_1' 1}$。

证明 如果我们证明了前面的结论，那么引理后面的结论就自然成立。因此我们只证前面的结论。注意到由$\Lambda(U(I))$和$\Lambda(U(I'))$的定义可以得到以下事实

$$d_{I_m} - d_{I_n} = (d_{I_m} - d_{I_1}) - (d_{I_n} - d_{I_1}) = (d_{I_m'} - d_{I_1'}) - (d_{I_n'} - d_{I_1'}) = d_{I_m'} - d_{I_n'},$$

再由$\Lambda(U(I)) = \Lambda(U(I'))$，可知

$$T_{I_m i} \cap T_{I_n j} \ne \emptyset \Leftrightarrow |d_{I_m i} - d_{I_n j}| \le 1 \Leftrightarrow |qd_{I_m} + d_i - qd_{I_n} - d_j| \le 1$$
$$\Leftrightarrow |qd_{I_m'} + d_i - qd_{I_n'} - d_j| \le 1 \Leftrightarrow T_{I_m' i} \cap T_{I_n' j} \ne \emptyset.$$

推论1 设

$$U(I) = \{I_i\}_{i=1}^k, \quad U(I') = \{I_i'\}_{i=1}^k \subset \Omega_N^*.$$

如果$\Lambda(U(I)) = \Lambda(U(I'))$，那么

$$\#\big\{T_{U(I_m i)} : 1 \le m \le k,\, 1 \le i \le N\big\} = \#\big\{T_{U(I_m i)} : 1 \le m \le k,\, 1 \le i \le N\big\}$$

且$\Lambda(U(I_m i)) = \Lambda(U(I_m' i))$。

定理1的证明 利用引理4和推论1从$\{\Lambda(U(I)) : I \in \Omega_N^*\} = \{\Lambda([I]) : I \in \Omega_N^*\}$中构造出一个满足定理要求的图递归集。因为$\{\Lambda([I]) : I \in \Omega_N^*\}$是有限集，从而其可记为$\{\Lambda([I])\} = \{\Lambda([I_0]), \Lambda([I_0]), \cdots, \Lambda([I_m])\}$，这个被定义为基图的顶点

$$V = \big\{\Lambda(\{0\}) = \{0\}\big\} \cup \big\{\Lambda(U(I_i)) : 1 \le i \le k\big\} := \big\{v_0, v_1, \cdots, v_m\big\}.$$

有向边$E = \{E_{ij}\}_{i,j=0}^m$定义为

$$E_{ij} = \big\{\min(d_{U(I'k)}) : \Lambda(U(I_j)) = \Lambda(U(I'k)),\, I' \in U(I_i),\, 1 \le k \le N\big\}.$$

从推论1可知，上述定义是合理的。显然如果$j \ne j'$，则$E_{ij} \cap E_{ij'} = \emptyset$。

基图$G = (V, E)$边e上的压缩映射定义为$\phi_{ij}^e(x) = q^{-1}(x + e)$，若$e \in E_{ij} \ne \emptyset$。由文献[3,4]知，可得唯一一个非空紧集列$\{T_0 = T, T_1, \cdots, T_m\}$，满足

$$T_i = \bigcup_{j=0}^{m} \bigcup_{e \in E_{ij}} \phi_{ij}^e(T_j), \quad 0 \le i \le m.$$

而由$\{T_i\}_{i=0}^m$的结构可知GIFS $\{\phi_{ij}^e\}$满足SSC。

3 算法和例子

从定理1可得如下算法。

1) $V_0=\{0\}$, $k=1$。 2) 令 $V_1=\{\Lambda(I):I\in\Omega_N^k\}$。

3) 若 $V_1\backslash V_0\neq\emptyset$，则 $k=k+1$, $V_0=V_1$，转2)。

4) 记 m 为 V_1 的长度，对于 $1\leq i$, $j\leq m$，令

$$E_{ij}=\big\{\min(d_{U(I'k)}):\Lambda(U(I_j))=\Lambda(U(I'k)),\,I'\in U(I_i),\,1\leq k\leq N\big\};$$

$\phi_{ij}^e(x)=q^{-1}(x+e)$，若 $e\in E_{ij}\neq\emptyset$。

例1 设 $q=5$, $\mathcal{D}_1=\{0,16/5,4\}$，则 $\{T_1=T,T_2=T\cup(T+5/4)\}$ 为满足SSC的图递归集。

证明 按算法计算，迭代二次可得顶点集为 $V=\big\{\{0\},\{0,4/5\}\big\}$，GIFS为

$$\Big\{\phi_{11}(x)=\phi_{21}(x)=\frac{x}{5},\phi_{12}(x)=\phi_{22}^1(x)=\frac{5x+16}{25},\phi_{22}^2(x)=\frac{5x+32}{25}\Big\}.$$

图递归集为 $\{T_1=T,T_2=T\cup(T+5/4)\}$。此时由文献[1]可求得其维数为

$$\dim_H T_i=\frac{\ln(3+\sqrt{5})-\ln 2}{\ln 5}.$$

参考文献：

[1] Ngai S M, Wang Y. Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2001, 63: 655-672

[2] Das M, Ngai S M. Graph-directed iterated function systems with overlaps[J]. Indiana University Mathematical Journal, 2004, 53: 109-134

[3] Falconer K J. Techniques in Fractal Geometry[M]. Chichester: Wiley, 1997

[4] He X G, Liu K S, Rao H. Self-affine sets and graph-directed systems[J]. Constructive Approximation, 2003, 19: 373-397

[5] Mauldin R D, Williams S C. Hausdorff dimension in graph directed constructions[J]. Transaction of the American Mathematiclal Society, 1988, 309(2): 811-829

[6] He X G. On the boundaries of self-similar tiles in $\mathbb{R}^1$[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2006, 134(11): 3163-3170

An Algorithm to Generate Directed-graph Sets with the SSC from Self-similar Sets

DENG Guo-tai[1], LIU Chun-tai[2]

(1- College of Mathematics and Statistics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079;

2-. Department of Mathematics and Physics, Wuhan Polytechnic University, Wuhan 430023)

Abstract: This paper discusses an algorithm to generate graph-directed sets from a self-similar set. Based on auxiliary iterated function systems, we give a new algorithm which can deal with a self-similar set whose compression ratio is a reciprocal of some positive integer and all entries of the digit set are rational numbers. Moreover, we prove that the generated graph-directed sets satisfy the strong separation condition.

Keywords: iterated function systems; strong separation conditions; directed-graph sets

Received: 22 Sep 2008. **Accepted:** 08 Oct 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10771082; 10926126).